

ASPETTI MATEMATICI DELLA MECCANICA QUANTISTICA - FM450

Registro delle lezioni

1. **04/10/2022, 8.00 - 10.00.** Crisi della Fisica Classica: radiazione di corpo nero, effetto fotoelettrico, effetto Compton, struttura atomica e spettri di emissione/assorbimento, ipotesi di de Broglie, doppia fenditura.
2. **05/10/2022, 16.00 - 18.00.** Meccanica Classica: equazione di Newton, formalismo Lagrangiano, formalismo Hamiltoniano (struttura simplettica, parentesi di Poisson, trasformazioni canoniche, Hamilton-Jacobi). Esempio della particella carica in campo elettromagnetico.
3. **06/10/2022, 10.00 - 12.00.** Stati e osservabili nel formalismo Hamiltoniano: stati puri/misti, valori medi, evoluzione temporale. Elettrodinamica classica: equazioni di Maxwell come problema di Cauchy, legge di conservazione dell'energia elettromagnetica, campi radiativi, potenziali e gauge.
4. **11/10/2022, 8.00 - 10.00.** Formulazione dell'equazione di Schrödinger: analogia ottica, onde piane con fasi relativisticamente invarianti. Legge di conservazione della norma L^2 per soluzioni regolari. Interpretazione di Born.
5. **12/10/2022, 16.00 - 18.00.** Operatori posizione e momento nella rappresentazione di Schrödinger: leggi di commutazione, teorema di Ehrenfest, principio di indeterminazione di Heisenberg. Postulati di von Neumann: definizioni operative di stati e osservabili dinamiche, stato come raggio in spazio di Hilbert.
6. **18/10/2022, 8.00 - 10.00.** Postulati di von Neumann: osservabili come operatori autoaggiunti, dinamica, processo di misurazione. Collasso della funzione d'onda. Spazi con prodotto interno, ortogonalità, proprietà fondamentali.
7. **20/10/2022, 10.00 - 12.00.** Proprietà topologiche di spazi con prodotto interno. Spazi di Hilbert. Topologia forte e topologia debole. Isomorfismi di spazi di Hilbert. Esistenza della proiezione su un sottospazio in spazi di Hilbert. Duale topologico e lemma di Riesz. Notazione bra-ket.
8. **25/10/2022, 8.00 - 10.00.** Basi ortonormali. Espansione di Fourier e identità di Parseval. Notazione bra-ket (decomposizione dell'identità). Esempi: base di Fourier; polinomi di Legendre, Hermite e Laguerre; spazi di Hilbert non separabili. Spazi di Hilbert separabili e isomorfismo con $\ell^2(\mathbb{N})$.
9. **26/10/2022, 16.00 - 18.00.** Somma diretta e prodotto tensore di spazi di Hilbert, con esempi. Teoria delle distribuzioni: idea generale, spazio delle funzioni test (topologia finale), spazio delle distribuzioni.
10. **27/10/2022, 10.00 - 12.00.** Distribuzioni regolari e singolari. Convergenza debole, derivata debole, moltiplicazione e composizione con funzioni lisce. Supporto e ordine di una distribuzione. Caratterizzazione di una distribuzione. Formulazione debole di problemi differenziali. Distribuzioni temperate. Trasformata di Fourier e sue proprietà, unitarietà in $L^2(\mathbb{R}^d)$ e notazione bra-ket.
11. **02/11/2022, 16.00 - 18.00.** Spazi di Sobolev: definizione degli spazi di ordine intero, caratterizzazione in trasformata di Fourier di spazi di ordine reale, teoremi di immersione in spazi di funzioni differenziabili, operatore traccia di Sobolev, teorema di regolarità ellittica. Operatori in spazi di Hilbert: dominio, nucleo, immagine, grafo, operatori limitati, operatori invertibili.
12. **03/11/2022, 10.00 - 12.00.** Estensioni e restrizioni di operatori lineari. Operatori chiudibili e chiusi. Esempi: operatori di moltiplicazione, nuclei integrali, posizione e momento, creazione e distruzione. Operatore aggiunto per operatori limitati e non limitati. Relazioni tra aggiunta e chiusura.
13. **09/11/2022, 16.00 - 18.00.** Esempi di operatori aggiunti. Operatori simmetrici, auto-aggiunti, essenzialmente autoaggiunti. Esempi: essenziale auto-aggiunzione dell'operatore posizione e non auto-aggiunzione dell'operatore impulso su un segmento. Relazione di indeterminazione per operatori simmetrici.
14. **10/11/2022, 10.00 - 12.00.** Criterio fondamentale di auto-aggiunzione. Perturbazioni piccole di operatori autoaggiunti e teorema di Kato-Rellich. Auto-aggiunzione di operatori positivi. Forme quadratiche e teorema KLMN.
15. **15/11/2022, 8.00 - 10.00.** Isometrie e operatori unitari. Trasformata di Cayley, relazioni tra operatori simmetrici/autoaggiunti e operatori isometrici/unitari. Spazi di difetto ed estensioni autoaggiunte. Coniugazione e criterio di von Neumann. Esempi. Insieme risolvente e spettro di operatori lineari. Spettro puntuale, continuo, residuo.
16. **16/11/2022, 16.00 - 18.00.** Prima e seconda identità di risolvente. Analiticità dell'operatore risolvente. Spettro chiuso per operatori chiusi. Proprietà spettrali di operatori simmetrici, autoaggiunti, unitari. Successioni di Weyl. Spettro puramente continuo dell'operatore posizione. Spettro dell'operatore di shift e dell'aggiunto.
17. **17/11/2022, 10.00 - 12.00.** Invarianza dello spettro sotto trasformazioni unitarie, esempio di una particella confinata su un segmento. Raggio spettrale e formula di Gelfand. Teorema spettrale per operatori autoaggiunti: enunciato e calcolo funzionale continuo.

18. **22/11/2022, 8.00 - 10.00.** Teorema di Riesz-Markov e misure spettrali, vettori ciclici associati ad operatori limitati, teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati.
19. **23/11/2022, 16.00 - 18.00.** Teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati commutanti, e per operatori normali. Teorema spettrale per operatori autoaggiunti non limitati. Calcolo funzionale per funzioni borelliane. Proiettori e proiettori spettrali.
20. **24/11/2022, 10.00 - 12.00.** Teorema spettrale con misure a valori di proiettori. Spettro puramente puntuale, assolutamente continuo, singolare continuo, e loro caratterizzazione. Spettro essenziale, discreto e loro caratterizzazione. Formula di Stone.
21. **29/11/2022, 8.00 - 10.00.** Operatori compatti e di rango finito; teorema di Weyl sullo spettro essenziale. Gruppi unitari a un parametro fortemente continui e teorema di Stone; dinamica quantistica; rappresentazioni di Schrödinger e Heisenberg. Rappresentazione di Weyl delle regole di commutazione canoniche.
22. **30/11/2022, 16.00 - 18.00.** Particella libera: dominio di autoaggiunzione, spettro, proiettori spettrali, nuclei integrali di risolvete e gruppo unitario della dinamica. Stime dispersive. Dinamica di pacchetti d'onda e interferenza.
23. **01/12/2022, 10.00 - 12.00.** Oscillatore armonico 1D: formulazione adimensionale, operatori di creazione/distruzione e loro proprietà, realizzazione autoaggiunta dell'Hamiltoniana e spettro. Dinamica e sue proprietà. Oscillatore armonico in più dimensioni: fattorizzazione e degenerazione dello spettro.
24. **06/12/2022, 8.00 - 10.00.** Atomo di idrogeno. Fattorizzazione del centro di massa. Autoaggiunzione e limitatezza dal basso (lemma di Sobolev e lemma di Kato). Stima del ground state (disuguaglianza di Hardy). Assenza di spettro singolare continuo.
25. **07/12/2022, 16.00 - 18.00.** Atomo di idrogeno. Spettro essenziale, teorema del viriale e spettro puntuale. Stima Coulombiana e ground state. Momento angolare e Hamiltoniana in coordinate polari.
26. **13/12/2022, 8.00 - 10.00.** Atomo di idrogeno. Autoaggiunzione e spettro del momento angolare, armoniche sferiche. Fattorizzazione del problema radiale e stati legati. Considerazioni sul ground state e degenerazione accidentale degli stati eccitati.
27. **14/12/2022, 16.00 - 18.00.** Teoria dello scattering. Introduzione, motivazioni e problematiche. Scattering da potenziale in meccanica classica. Sezione d'urto differenziale (calcolo esatto per sfera rigida e potenziale Coulomb). Formulazione astratta: operatori di Moller e operatore di scattering. Alcuni risultati classici.
28. **15/12/2022, 10.00 - 12.00.** Teoria dello scattering da potenziale in meccanica quantistica. Stati di scattering, stati legati, e loro proprietà. Stati asintoticamente liberi. Operatori d'onda, operatore di scattering. Nozioni di completezza. Relazioni di intertwining per operatori d'onda e conseguenze.
29. **20/12/2022, 8.00 - 10.00.** Chain rule e criterio di completezza per operatori d'onda. Metodi 'time dependent': teoremi di Cook e Kupsch-Sandhas; teorema di Hack-Cook. Metodi 'classe traccia': definizione e proprietà di operatori classe traccia; teorema di Pearson; teoremi di Kato-Rosenblum, Birman-Kuroda, Birman. Operatori di Hilbert-Schmidt: definizione e proprietà.
30. **21/12/2022, 16.00 - 18.00.** Applicazione del teorema di Birman-Kuroda. Principio di invarianza. Completezza asintotica e potenziali di Rollnik. Metodi stazionari (cenni): operatori d'onda abeliani, autofunzioni generalizzate, equazione di Lippmann-Schwinger, serie di Born per la matrice di trasferimento.

Ultimo aggiornamento: 21 dicembre 2022